УДК 533.6.011

О ВЫБОРЕ ФУНКЦИОНАЛА ДЛЯ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В.М. Галкин

Томский политехнический университет
E-mail: vlg@tpu.ru

Рассматривается численное решение прямым методом вариационной задачи о построении сверхзвукового сопла с равномерным потоком на выходе. Предложен способ выбора минимизируемого функционала. Проведено сравнение с результатом, полученным другим методом.

1. Введение

Известно, что если возможна численная (программная) реализация некоторой задачи, то эта реализация может быть сделана неединственным способом. В этом смысле не являются исключением и прямые численные методы решения вариационных задач, когда решение получается в результате минимизации определенного функционала. При этом для класса вариационных задач, к числу которых относятся и газодинамические задачи, некоторые численные реализации могут приводить к тому, что область определения будет являться неодносвязным множеством.

В качестве характерного примера рассмотрим задачу, решаемую прямым методом, о численном построении сверхзвукового сопла с равномерным потоком на выходе. Отметим, что к этому близка задача о сопле максимальной тяги [1]. Пусть в некотором сопле, профиль которого определяется варьируемыми переменными, рассчитывается поле течения, а по найденному полю вычисляется функционал, характеризующий неравномерность потока на выходе из сопла и имеющий минимальное значение тогда, когда поток равномерный.

В основу численной реализации указанной задачи могут быть положены два основных подхода. Первый использует тот факт, что поток остается сверхзвуковым и возможно использование простых в реализации и быстрых в расчете маршевых схем; второй подход допускает существование дозвуковых течений и, соответственно, требуется применение гораздо более сложных и более медленных численных методов. Пусть в основу первой численной реализации положен метод характеристик [2]. Тогда очевидно, что если в некоторых контурах не будет реализовываться полностью сверхзвуковое течение, то это приведет к аварийному останову (авосту). Следствием этого будет неодносвязность области определения, поскольку функционал, использующий параметры потока на выходе из сопла, вычислить нельзя. Второй подход, учитывающий появление дозвукового течения и использующий, например, метод установления и схему Годунова [3], лишен это недостатка, однако интеллектуальные и временные затраты по сравнению с методом характеристик возрастают на порядок.

В работе [4] наряду с методом характеристик, позволяющим быстро получать решение, предложен функционал, который, в частности, использует значения параметров течения, найденные на каждой характеристике C^+. Это позволяет даже при наличии авостов продолжить функционал на односвязную область.

В данной статье, которая является развитием работы [4], предлагается вычислять функционал

более простым способом. Для оценки правильности полученных результатов использовалось решение, полученное по методике [2].

2. Постановка задачи

Дано установившееся незакрученное изоэнтропическое и изоэнергетическое течение идеального совершенного газа в осесимметричном сопле, рис. 1. Характеристические уравнения и условия совместности имеют вид:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}(\theta \pm \alpha),$$

$$d\theta \pm \frac{\cos^2(\alpha)}{(\gamma+1)/2 - \cos^2(\alpha)} d\alpha \pm \frac{\sin(\alpha)\sin(\theta)}{y\cos(\theta \pm \alpha)} dx = 0, \quad (1)$$

где γ – показатель адиабаты, далее γ=1,4; x и y – продольная и поперечная координаты, отнесенные к радиусу сопла в минимальном сечении; α=arsin(1/M) – угол Маха, M – число Маха; θ – угол наклона вектора скорости (линии тока) к оси x; знак +(–) соответствует характеристике C^+(C^-); полагается, что во входном сечении x_a=0. На стенке реализуется условие непротекания: tg(θ)=$f'(x)$, где $f(x)$ – функция, описывающая контур сопла, а штрих обозначает производную по x. Во входном сечении x_a поток однородный: θ_{in}=0, M_{in}=1, где индекс «in» соответствует входу в сопло. Далее индекс «0» соответствует выходу из сопла.

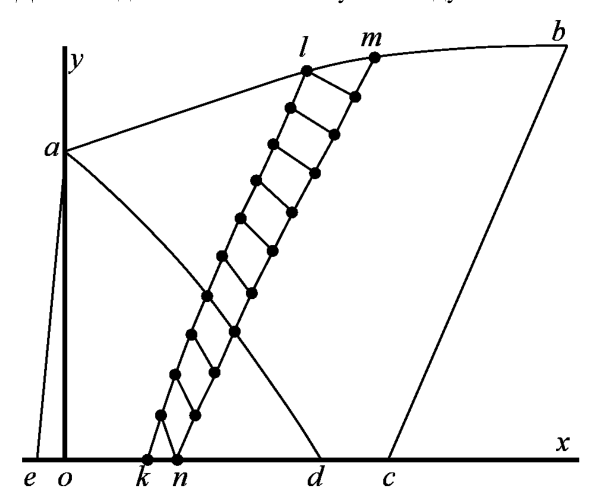


Рис. 1. *Схема сопла: oa – минимальное сечение; ab – сопло с угловой точкой; ad – характеристика C^-, принадлежащая пучку волн разрежения; ae – начальная характеристика ; kl – характеристика C_i^+; nm – характеристика C_{i+1}^+; cb – конечная характеристика C^+*

При вычислении параметров течения в угловой точке «a» используется формула Прандтля-Майера, следующая из (1):

$$\theta_2 + \psi(\alpha_2) = \theta_1 + \psi(\alpha_1),$$

$$\psi(\alpha) = -\alpha + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,\mathrm{tg}(\alpha)\right), \quad (2)$$

где нижние индексы 1 и 2 соответствуют параметрам до и после разворота в угловой точке; θ_1=0, α_1=α_{in}.

Необходимо найти контур сопла (рис. 1), на выходе из которого в сечении x=x_b поток должен иметь однородные поперек сопла параметры θ=0 и число Маха M_0>1. Считается, что давление на выходе из сопла больше давления окружающей среды.

3. Тестовая задача

При заданном показателе адиабаты рассмотрим однопараметрическое, зависящее от M_0, семейство сопел с угловой точкой и равномерной характеристикой на выходе. Известно [1], что эти сопла имеют максимальную тягу, являются кратчайшими и обеспечивают нулевые потери на рассеяние в выходном сечении. Поскольку на выходе поток будет однородный и параллельный, то указанные сопла будут удовлетворять поставленным выше условиям.

Использование методики [2] при заданных M_0>1 и показателе адиабаты позволяет найти единственное сопло, принадлежащее указанному семейству и удовлетворяющее условиям задачи. Контур сопла, полученный таким образом, считается эталоном, и с ним будет проводиться сравнение прямого метода, а координаты начальной точки «a» и найденной конечной точки «b» будут являться исходными данными для прямого метода.

4. Прямой метод

Даны координаты точек «a», «b» и тангенс угла наклона сопла в точке «b»:

$$f(x_a) = y_a, \quad f(x_b) = y_b, \quad f'(x_b) = y_b',$$
$$x_a = 0, \quad y_a = 1, \quad y_b' = 0. \quad (3)$$

Последнее равенство следует из условия θ=0 на выходе из сопла.

Для аппроксимации искомого контура в качестве базисных функций используются степенные полиномы:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N+3} c_i t^{i-1}, \ t = (2x - x_b - x_a)/(x_b - x_a),$$
$$t \in [-1,1], \ x \in [x_a, x_b]. \quad (4)$$

Так как должны выполняться условия (3), то коэффициенты c_{N+1}, c_{N+2}, c_{N+3} и профиль сопла $f(x)$ выражаются через N линейно независимых коэффициентов c_1, ..., c_N. Требуется найти профиль сопла, удовлетворяющий геометрическим условиям (3) и постановке задачи.

Прямой расчет. В рамках прямого метода принято называть прямым расчетом единичный расчет поля течения, который заканчивается вычислением функционала. Выбор функционала будет обсуждаться ниже. В прямом расчете система уравнений (1) решается по схеме, рис. 2, где цифрами «1» и «2» обозначены точки с известными параметрами, из которых выходят характеристики C^+ и C^-. Цифрой «3» обозначена точка их пересечения. Записывая уравнения (1) в разностном виде, получим систему уравнений относительно неизвестных параметров α_3^j, θ_3^j, x_3^j, y_3^j в точке «3»:

$$
\begin{cases}
\dfrac{y_3^j - y_2}{x_3^j - x_2} = \mathrm{tg}(\theta_{23} - \alpha_{23}),\\
\dfrac{y_3^j - y_1}{x_3^j - x_1} = \mathrm{tg}(\theta_{13} + \alpha_{13}),\\
\theta_3^j - \theta_1 + \dfrac{\cos^2\alpha_{13}}{(\gamma+1)/2 - \cos^2\alpha_{13}}(\alpha_3^j - \alpha_1) +\\
+\dfrac{\sin\alpha_{13}\sin\theta_{13}}{y_{13}\cos(\theta_{13}+\alpha_{13})}(x_3^j - x_1) = 0,\\
\theta_3^j - \theta_2 - \dfrac{\cos^2\alpha_{23}}{(\gamma+1)/2 - \cos^2\alpha_{23}}(\alpha_3^j - \alpha_2) -\\
-\dfrac{\sin\alpha_{23}\sin\theta_{23}}{y_{23}\cos(\theta_{23}-\alpha_{23})}(x_3^j - x_2) = 0,
\end{cases}
$$

здесь j=1,2,... – номер итерации. Обозначим $p=\alpha,\theta,x,y$, тогда $p_{13}=(p_1+p_3^{j-1})/2$, $p_{23}=(p_2+p_3^{j-1})/2$. Полученная система решалась итерационно до выполнения условия $\max|p_3^j-p_3^{j-1}|<10^{-8}$. На начальной итерации полагалось $p_3^0=(p_1+p_2)/2$. Так как на оси θ=0, y=0, а на стенке $\theta=\mathrm{arctg}(f'(x))$ и $y=f(x)$, то в данной системе уравнений производились очевидные упрощения.

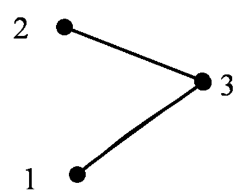


Рис. 2. *Схема расчета: 13 – отрезок характеристики C^+; 23 – отрезок характеристики C^-*

Таким образом, от оси к стенке, по известной характеристике C_i^+ рассчитывается следующая характеристика C_{i+1}^+, где индексы i и i+1 – порядковые номера вычисляемых характеристик. Расчет производится до тех пор, пока очередная характеристика C^+ не приходит в точку «b». В качестве начальных условий используются θ_{in}=0 и M_{in}=1,001 на начальной характеристике ae. Такие начальные условия достаточно часто применяют вместо плоской звуковой линии [5]. Отметим, что для вычисления интегралов использовалась формула трапеции.

Выбор функционала. В [4] использовался функционал, который рассчитывался вдоль характеристики (рис. 1):

$$J = \sqrt{\int_c^b \theta^2 dl}. \qquad (5)$$

Если при вычислении характеристики C_{i+1}^+ происходил авост, то формула (5) заменялась выражением:

$$J = (x_b - x_l) + \sqrt{\int_k^l \theta^2 dl} + \int_a^b \varphi(x)dx,$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} |f(x)|, & f'(x) < 0\\ 0, & f'(x) \ge 0 \end{cases}, \qquad (6)$$

где первый интеграл вычислялся вдоль последней рассчитанной характеристики C_i^+, а второй – суммировал площадь участков контура сопла с отрицательными углами наклона. Если авост произошел при расчете характеристики C_1^+, то x_l=0 и θ=0 вдоль начальной характеристики C_2^+. В результате функционал (6) приобретает вид:

$$J = x_b + \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (7)$$

Как видно, способ вычисления функционала (5–7), предложенный в [4], достаточно сложен. И, кроме этого, замена формулы (5) на формулу (6) приводит к тому, что функционал, сохраняя непрерывность, в общем случае может стать недифференцируемым.

В данной работе предлагается другой подход. Рассмотрим два функционала

$$J_1 = \sqrt{\frac{1}{L}\int_{C_i^+} \theta^2 dl},$$

$$J_2 = \sqrt{\frac{1}{L}\int_{C_i^+} ((\alpha-\alpha_0)/\alpha_{in})^2 dl}, \quad L = \int_{C_i^+} dl, \qquad (8)$$

которые вычисляются вдоль произвольной характеристики C_i^+. Выбор функционалов (8) обусловлен следующими соображениями.

Пусть сопло с известным M_0 удовлетворяет условиям задачи. Тогда, как видно на рис. 3, первый функционал из (8) имеет два минимума J_1=0. Первому минимуму на характеристике ae соответствует θ=0 и $\alpha_{in}=\arcsin(1/M_{in})$. Второму минимуму на характеристике cb соответствует θ=0 и $\alpha_0=\arcsin(1/M_0)$. Как следует из уравнений (1), только второй минимум является необходимым и достаточным условием решения задачи. Очевидно, что использование первого функционала не гарантирует единственности решения.

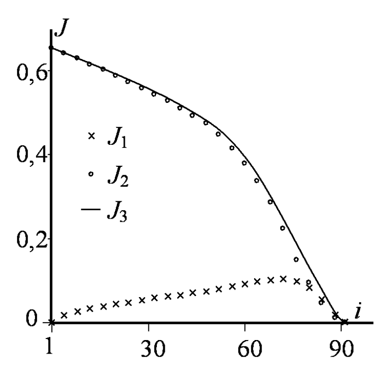


Рис. 3. *Значение функционалов вдоль характеристик C_i^+, i – номер характеристики*

Второй функционал из (8), в отличие от первого, имеет единственный минимум J_2=0 на характеристике cb (рис. 3), чему соответствует $\alpha=\alpha_0$. Однако этот минимум является необходимым, но не достаточным условием решения задачи, поскольку может не выполняться условие θ=0. Комбинация J_1 и J_2 дает следующий функционал:

$$J_3 = \sqrt{\frac{1}{L}\int_{C_i^+}[((\alpha-\alpha_0)/\alpha_{in})^2+\theta^2]\,dl}. \qquad (9)$$

который имеет единственный минимум $J_3=0$ на характеристике *cb* (рис. 3). Так как этот минимум является необходимым и достаточным условием решения задачи и ему соответствует $\theta=0$ и $\alpha=\alpha_0$, то далее будет использоваться функционал (9).

При вычислении функционала (9) воспользуемся приемом, предложенным в [4], и если при вычислении характеристики C_{i+1}^+ происходит авост, то функционал (9) вычисляется вдоль уже рассчитанной характеристики C_i^+.

Если сопло имеет отрицательный наклон сопла $f'(x_a)<0$ в точке «*a*», то авост происходит при вычислении характеристики C_2^+, и функционал (9) вычисляется на начальной характеристике *ae*. Поскольку при вычислении параметров течения в угловой точке «*a*» используется формула Прандтля-Майера (2), то можно использовать эту формулу и для вычисления α_2 при $\theta_2<0$. В этом случае найденные значения α_2 не имеют физического смысла, т. к. этому соответствует дозвуковое течение. Однако в силу своей непрерывности (рис. 4) функция $\alpha_2(\theta_2)$ позволяет продолжить функционал (9) на односвязную область в случае отрицательного наклона сопла $f'(x_a)<0$ и обеспечить функционалу непрерывность и дифференцируемость. Как показали расчеты, при вычислении по формуле трапеции функционала на начальной характеристике *ae* достаточно брать только две точки – «*a*» и «*e*».

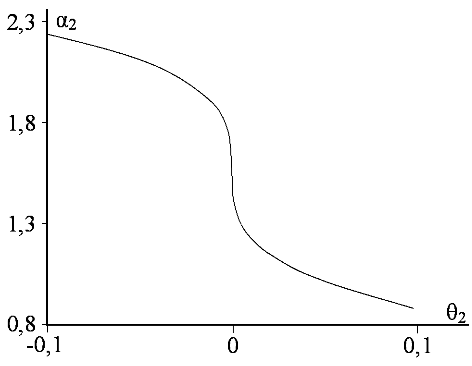


Рис. 4. *Зависимость* $\alpha_2=\alpha_2(\theta_2)$

Поскольку на входе в сопло граничные условия не меняются, а параметры течения определяются только профилем сопла (4), то значение функционала (9) будет неявно зависеть от этого профиля. Таким образом, задача нахождения профиля сопла $f(x)$, доставляющего экстремум функционалу (9), сводится к поиску точки $(c_1,...,c_N)$, в которой функция многих переменных $J_3=J_3(c_1,...,c_N)$ имеет экстремум. Для нахождения минимума этой функции использовался квазиньютоновский метод Бройдена из [6].

5. Численные результаты

Число N варьируемых переменных c_i менялось от 1 до 10, начальное значение $c_i=0$. На характеристике *ae* задавалось 50 точек. Координаты точек «*a*» и «*b*»: (0; 1) и (3,576; 1,299). Этим значениям соответствует найденное из [2] эталонное сопло с угловой точкой и числом Маха на выходе $M_0=2$.

Сравнение решения для обоих функционалов с эталонным соплом показало, что при $N=10$ ординаты сопел отличались в четвертом знаке после запятой, а максимальная относительная погрешность по составила 0,02 %.

На рис. 5 представлены результаты минимизации в виде окончательных значений функционалов для различного числа N. Таблица демонстрирует влияние числа коэффициентов и используемого функционала как на число прямых расчетов, так и на количество авостов. Из представленных результатов видно, что предложенный функционал (9), несмотря на простоту, по эффективности не уступает функционалу (5–7), предложенному в [4].

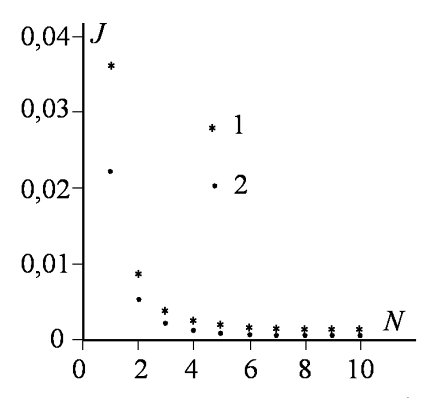


Рис. 5. *Минимизация функционалов: 1) формулы (5–7) из [4], 2) предлагаемая формула (9)*

Таблица. *Минимизация функционалов. В числителе – число прямых расчетов, в знаменателе – авостов*

№	Формулы (5–7) [4]	Предлагаемая формула (9)
1	13/2	17/2
2	36/3	39/4
3	63/4	69/5
4	98/4	99/5
5	135/5	115/7
6	150/7	166/7
7	199/7	203/6
8	273/6	304/7
9	385/8	320/8
10	444/7	492/9

Заключение

Проведенные численные исследования показывают, что предложенный функционал достаточно прост в реализации, при наличии авостов имеет продолжение на односвязную область и сохраняет дифференцируемость, а по эффективности не уступает ранее рассмотренному в работе [4] функционалу. Сравнение профиля найденного сопла с эталонным профилем показало, что при 10 варьируемых переменных максимальная относительная погрешность по ординате составляет 0,02 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. – М.: Наука, 1979. – 448 с.
2. Кацкова О.Н. Расчет равновесных течений газа в сверхзвуковых соплах. – М.: ВЦ АН СССР, 1964. – 61 с.
3. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
4. Галкин В.М., Волков Ю.С. Сравнение базисных функций в прямой задаче профилирования сверхзвуковой части сопла // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2004. – Т. 7. – № 4(20). – С. 48–58.
5. Крайко А.Н., Тилляева Н.И. Оптимальное профилирование контура сверхзвуковой части тарельчатого сопла // Механика жидкости и газа. – 2000. – № 6. – С. 172–184.
6. Дэннис Дж. мл., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с.

УДК 536.21+692.2:691.327:666.973.2:666.64-492.3